Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Pour i et j deux entiers naturels tels que $i \leqslant j$, $[\![i, j]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $i \leqslant k \leqslant j$.

Pour n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n.

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel n, par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On identifie un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On note $\vec{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel dirigeant $\mathcal{P}$ et $\mathcal{B}$ la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{\mathcal{P}}$, on note $\|\vec{u}\|$ sa norme euclidienne.

Définitions

Un point pondéré est un couple (M, α), où M est un point de $\mathcal{P}$ et α un nombre réel.

Pour tout entier naturel n non nul, un système de $n+1$ points pondérés est un $(n+1)$-uplet $((P_0, \alpha_0), \ldots, (P_n, \alpha_n))$. Le poids total de ce système de points pondérés est

$$\alpha = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.$$

Partie A : barycentres

I. Existence et caractérisation

Soit n un entier naturel non nul et $((P_0, \alpha_0), \ldots, (P_n, \alpha_n))$ un système de $n+1$ points pondérés de poids total α.

1. On note f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\vec{\mathcal{P}}$ qui, à tout **point** M de $\mathcal{P}$ associe le **vecteur**

$$f(M) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MP_i}.$$

a. Soient M et N deux points de $\mathcal{P}$. Démontrer l'égalité vectorielle

$$f(N) = f(M) + \alpha \overrightarrow{NM}.$$

b. Démontrer que, si $\alpha \neq 0$, alors f est injective et surjective.

c. En déduire que f est bijective si et seulement si $\alpha \neq 0$.

2. On suppose α non nul. Montrer qu'il existe un unique point G tel que

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}.$$

Ce point G est appelé barycentre du système de points pondérés $((P_i, \alpha_i))_{0 \leqslant i \leqslant n}$.

On note

$$G = \mathrm{bar}((P_0, \alpha_0), \ldots, (P_n, \alpha_n)).$$

3. On suppose que $\alpha \neq 0$ et on note G le barycentre du système $((P_i, \alpha_i))_{0 \leqslant i \leqslant n}$. Montrer que, pour tout point M de $\mathcal{P}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MP_i} = \alpha \overrightarrow{MG}.$$

II. Barycentre de deux points

Soient P_0, P_1 deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.

1. Quel est le barycentre du système de points pondérés $((P_0, 1), (P_1, 1))$?

2. Démontrer que, pour tout nombre réel t, le barycentre du système de points pondérés $((P_0, t), (P_1, 1-t))$ appartient à la droite (P_0P_1).

3. Soit M un point de la droite (P_0P_1).

a. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel t tel que M soit le barycentre du système de points pondérés $((P_0, t), (P_1, 1-t))$.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur t pour que M soit un point du segment $[P_0P_1]$.

III. Propriétés du barycentre

1. Homogénéité

a. Soit λ un réel non nul. Montrer que le barycentre du système de points pondérés $((P_0, \lambda\alpha_0), (P_1, \lambda\alpha_1), \cdots, (P_n, \lambda\alpha_n))$, de poids total supposé non nul, est égal au barycentre du système de points pondérés $((P_0, \alpha_0), (P_1, \alpha_1), \cdots, (P_n, \alpha_n))$.

b. Soient trois points P_0, P_1, P_2 formant un triangle non aplati du plan $\mathcal{P}$. On suppose qu'il existe deux triplets $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ et $(\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2)$ de nombres réels, chacun de somme non nulle, tels que les barycentres des systèmes $((P_0, \alpha_0), (P_1, \alpha_1), (P_2, \alpha_2))$ et $((P_0, \alpha'_0), (P_1, \alpha'_1), (P_2, \alpha'_2))$ soient égaux. On note alors M ce point.
Démontrer que $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ et $(\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2)$ sont proportionnels.
Indication : on pourra justifier que $(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2})$ est une base de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et décomposer le vecteur $\overrightarrow{P_0M}$ dans cette base de deux façons différentes.

2. Associativité simple

a. *Un cas particulier.*
Étant donnés trois points A, B, C du plan $\mathcal{P}$ et trois réels α, β, γ tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$, on note $m_1 = \alpha + \beta$ et G_1 le barycentre du système $((A, \alpha), (B, \beta))$.

i. Démontrer que le barycentre du système $((G_1, m_1), (C, \gamma))$ est égal au barycentre du système $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$.

ii. En utilisant ce résultat, démontrer que les trois médianes d'un triangle non aplati sont concourantes en un point situé aux deux tiers de chacune à compter du sommet associé.

b. *Cas général.*
Soit n un entier naturel non nul, $I = [\![0, n]\!]$ et r un entier naturel non nul inférieur ou égal à n. On suppose que $I = J_0 \cup J_1 \cup \cdots \cup J_r$, les J_k ($k \in [\![0, r]\!]$) étant non vides et deux à deux disjoints. On considère un système de points

pondérés $((P_i, \alpha_i)\ ;\ i \in I)$ avec $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \neq 0$. Pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, on suppose que $\beta_k = \sum_{i \in J_k} \alpha_i \neq 0$ et on note Q_k le barycentre du système $((P_i, \alpha_i)\ ;\ i \in J_k)$.

Démontrer que $\sum_{k=0}^{r} \beta_k \neq 0$ et que

$$\text{bar}((P_i, \alpha_i)\ ;\ i \in [\![0, n]\!]) = \text{bar}((Q_k, \beta_k)\ ;\ k \in [\![0, r]\!]).$$

3. Associativité double

On considère deux entiers naturels p et n, un $n+1$-uplet $(P_0, \ldots, P_n)$ de points de $\mathcal{P}$ et deux familles finies de réels $(\alpha_{i,j})_{\substack{0 \leqslant i \leqslant p \\ 0 \leqslant j \leqslant n}}$ et $(\beta_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ vérifiant

$$\forall i \in [\![0, p]\!],\ \sum_{j=0}^{n} \alpha_{i,j} = 1 \text{ et } \sum_{i=0}^{p} \beta_i = 1.$$

Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, on note B_i le barycentre du système de points pondérés $((P_j, \alpha_{i,j})\ ; j \in [\![0, n]\!])$ et on note G le barycentre du système de points pondérés $((B_i, \beta_i)\ ;\ i \in [\![0, p]\!])$.

Démontrer que $\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{p} \beta_i \alpha_{i,j} \right) = 1$ et que G est le barycentre du système de points pondérés $\left(\left(P_j, \sum_{i=0}^{p} \beta_i \alpha_{i,j} \right)\ ;\ j \in [\![0, n]\!] \right)$.

IV. Barycentres et applications affines

Soit g une application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. On rappelle que sa partie linéaire φ_g est l'unique endomorphisme de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ tel que, pour tous points A, B de $\mathcal{P}$,

$$\overrightarrow{g(A)g(B)} = \varphi_g(\overrightarrow{AB}).$$

Soit $((P_0, \alpha_0), \ldots, (P_n, \alpha_n))$ un système de points pondérés de poids total non nul.
Démontrer que l'image par g du barycentre du système $((P_0, \alpha_0), \ldots, (P_n, \alpha_n))$ est le barycentre du système de points pondérés $((g(P_0), \alpha_0), \ldots, (g(P_n), \alpha_n))$.

Partie B : polynômes de Bernstein

Définition

Pour tout entier naturel n et tout entier k de l'intervalle $[\![0, n]\!]$, on appelle k-ième polynôme de Bernstein de degré n le polynôme

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}.$$

V. Propriétés des polynômes de Bernstein

1. Valeurs en 0 et en 1
Démontrer que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad & B_{n,0}(0) = B_{n,n}(1) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1, n]\!], \quad & B_{n,k}(0) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad & B_{n,k}(1) = 0. \end{aligned}$$

2. Positivité
Démontrer que, pour tout nombre réel t dans l'intervalle $[0, 1]$, tout entier naturel n et tout entier naturel k de $[\![0, n]\!]$,

$$B_{n,k}(t) \geqslant 0.$$

3. Symétrie
Démontrer que, pour tout nombre réel t, tout entier naturel n et tout entier naturel k de $[\![0, n]\!]$,

$$B_{n,k}(t) = B_{n,n-k}(1-t).$$

4. Partition de l'unité
Démontrer que, pour tout nombre réel t et tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t) = 1.$$

5. Relations de récurrence

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 et tout nombre réel t,

$$\begin{aligned} B_{n,0}(t) &= (1-t)B_{n-1,0}(t), \\ B_{n,n}(t) &= tB_{n-1,n-1}(t). \end{aligned}$$

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, tout entier naturel k de $[\![1, n-1]\!]$ et tout nombre réel t,

$$B_{n,k}(t) = (1-t)B_{n-1,k}(t) + tB_{n-1,k-1}(t).$$

VI. Dérivabilité et maximum

Dans cette question, n désigne un entier naturel non nul.

1. Justifier que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $B_{n,k}$ est dérivable et démontrer les égalités suivantes, valables pour tout nombre réel t :

$$\begin{aligned} & B'_{n,0}(t) = -nB_{n-1,0}(t), \\ & B'_{n,n}(t) = nB_{n-1,n-1}(t), \\ \forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad & B'_{n,k}(t) = n\left(B_{n-1,k-1}(t) - B_{n-1,k}(t)\right). \end{aligned}$$

2. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$B'_{n,k}(0) = \begin{cases} -n \text{ si } k = 0, \\ n \text{ si } k = 1, \\ 0 \text{ si } k \geqslant 2. \end{cases} \qquad B'_{n,k}(1) = \begin{cases} n \text{ si } k = n, \\ -n \text{ si } k = n-1, \\ 0 \text{ si } k \leqslant n-2. \end{cases}$$

3. Soit k dans $[\![0, n]\!]$. Démontrer que la fonction, qui à tout nombre réel t de l'intervalle $[0, 1]$ associe $B_{n,k}(t)$, admet un unique maximum, atteint en $\frac{k}{n}$. Donner la valeur de ce maximum.

VII. Un peu d'algèbre linéaire

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note P' son polynôme dérivé et on définit les polynômes $\Phi_n(P)$ et $\Psi_n(P)$ par :

$$\Phi_n(P)(X) = nXP(X) + X(1-X)P'(X), \qquad \Psi_n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X).$$

1. Démontrer que Φ_n et Ψ_n sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Démontrer que, pour tout entier k dans $[\![0, n]\!]$,

$$\Phi_n(B_{n,k})(X) = kB_{n,k}(X).$$

3. En déduire que $(B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que Φ_n est diagonalisable dans $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Démontrer que Φ_n n'est pas bijectif et que Ψ_n est bijectif.

Partie C : courbes de Bézier

Les courbes de Bézier ont été inventées à la fin des années 1950 par Pierre Bézier, ingénieur des usines Renault, pour tracer des profils de carrosserie à l'aide d'un logiciel. Ces courbes sont également utilisées pour concevoir les polices de caractères dites polices vectorielles, comme la police Postscript.

Définition

Soit n un entier naturel non nul et $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ un $(n+1)$-uplet de points de $\mathcal{P}$. L'ensemble des points $M(t) = \text{bar}\left((P_0, B_{n,0}(t)), (P_1, B_{n,1}(t)), \ldots, (P_n, B_{n,n}(t))\right)$, lorsque t décrit l'intervalle $[0, 1]$, s'appelle la courbe de Bézier de points de contrôle $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$. On note cette courbe $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n))$. Le point $M(t)$ est le point de $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n))$ de paramètre t.

VIII. **1.** Montrer que, pour t appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, $M(t)$ est bien défini.

2. Montrer que, pour t appartenant à l'intervalle $[0, 1]$

$$\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t)\overrightarrow{OP_k}.$$

3. Démontrer que les points P_0 et P_n appartiennent à la courbe de Bézier $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n))$.

IX. On considère la courbe de Bézier Γ associée aux points de contrôle $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n)$ et la courbe de Bézier Γ' associée aux points de contrôle $(P_n, P_{n-1}, \cdots, P_1, P_0)$ (la liste des points de contrôle de Γ' est parcourue en sens inverse de celle des points de contrôle de Γ).
Pour tout réel $t \in [0,1]$, on pose :

$$M(t) = \text{bar}\left((P_0,\ B_{n,0}(t)), (P_1,\ B_{n,1}(t)), \ldots, (P_{n-1},\ B_{n,n-1}(t)), (P_n,\ B_{n,n}(t))\right),$$
$$N(t) = \text{bar}\left((P_n,\ B_{n,0}(t)), (P_{n-1},\ B_{n,1}(t)), \ldots, (P_1,\ B_{n,n-1}(t)), (P_0,\ B_{n,n}(t))\right).$$

1. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $M(t) = N(1-t)$.

2. Que peut-on en déduire pour les courbes de Bézier Γ et Γ' ?

X. Montrer que la courbe de Bézier associée aux points de contrôle (P_0, P_1) est le segment $[P_0\,, P_1]$.

XI. Dans cette question on suppose que P_0 et P_1 sont distincts et que P_{n-1} et P_n sont distincts.
Montrer qu'un vecteur tangent en P_0 à $\Gamma((P_0, \ldots, P_n))$ est $n\overrightarrow{P_0P_1}$ et préciser un vecteur tangent en P_n à $\Gamma((P_0, \ldots, P_n))$.

XII. Soit g une application affine du plan $\mathcal{P}$. Montrer que l'image par g de la courbe de Bézier $\Gamma((P_0, \ldots, P_n))$ est une courbe de Bézier dont on précisera les points de contrôle.

XIII. Soit i_0 un entier de l'intervalle $[\![0, n]\!]$ et $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On note P'_{i_0} l'image du point P_{i_0} par la translation de vecteur $\vec{u}$. On considère la courbe de Bézier dans laquelle le point de contrôle P_{i_0} a été remplacé par P'_{i_0}, les autres étant inchangés. Pour t appartenant à l'intervalle $[0,1]$, on note $N(t)$ le point courant de cette nouvelle courbe de Bézier.
Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0,1]$, le vecteur $\overrightarrow{M(t)N(t)}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et que

$$\max_{t\in[0\,;1]} \|\overrightarrow{M(t)N(t)}\| \quad = \quad \binom{n}{i_0} \frac{i_0^{i_0}(n-i_0)^{n-i_0}}{n^n} \|\vec{u}\|.$$

Partie D : algorithme de Casteljau

XIV. Soient P_0, P_1, P_2 trois points du plan $\mathcal{P}$. Soient t un réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$ et $M(t)$ le point de paramètre t de la courbe de Bézier de points de contrôle (P_0, P_1, P_2). On a donc :

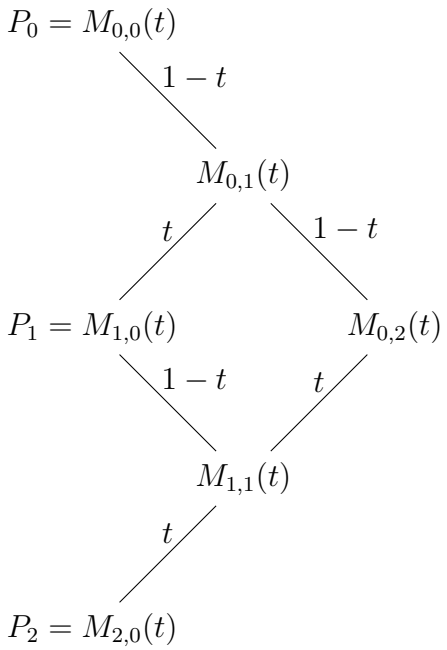
$$M(t) = \text{bar}\left((P_0,\ B_{2,0}(t)), (P_1,\ B_{2,1}(t)), (P_2,\ B_{2,2}(t))\right).$$

1. Expliciter $B_{2,0}(t)$, $B_{2,1}(t)$, $B_{2,2}(t)$.

2. Pour tout t un réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$, on note :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![0,2]\!],\ M_{k,0}(t) &= P_k,\\
M_{0,1}(t) &= \text{bar}\left((M_{0,0}(t),\ 1-t), (M_{1,0}(t),\ t)\right),\\
M_{1,1}(t) &= \text{bar}\left((M_{1,0}(t),\ 1-t), (M_{2,0}(t),\ t)\right),\\
M_{0,2}(t) &= \text{bar}\left((M_{0,1}(t),\ 1-t), (M_{1,1}(t),\ t)\right).
\end{aligned}$$

On peut représenter cette construction à l'aide du schéma ci-dessous :



Montrer que $M(t) = M_{0,2}(t)$. On justifiera cette égalité en citant explicitement chacun des résultats utilisés.

XV. Soient n un entier naturel non nul, $P_0, \ldots, P_n$ $n+1$ points du plan et t un réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$. On définit par récurrence sur l les points $M_{k,l}(t)$ du plan indexés par $l \in [\![0, n]\!]$ et $k \in [\![0, n-l]\!]$ de la façon suivante :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad M_{k,0}(t) = P_k,$$
$$\forall l \in [\![0,n-1]\!],\ \forall k \in [\![0,n-l-1]\!], \quad M_{k,l+1}(t) = \text{bar}\left((M_{k,l}(t),\ 1-t), (M_{k+1,l}(t),\ t)\right).$$

1. Montrer que, pour tout l appartenant à $[\![0,n]\!]$ et tout k appartenant à $[\![0,n-l]\!]$,

$$M_{k,l}(t) = \text{bar}\left((P_k,\ B_{l,0}(t)), (P_{k+1},\ B_{l,1}(t)), \ldots, (P_{k+l},\ B_{l,l}(t))\right).$$

2. Expliquer comment ces points permettent de construire le point $M(t)$ de la courbe de Bézier $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n))$.

XVI. Dans le repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points

$$P_0(0\,;0) \qquad P_1(1\,;1) \qquad P_2(2\,;1) \qquad P_3(2\,;0).$$

Construire géométriquement, à l'aide de l'algorithme de Casteljau, le point $M\left(\frac{1}{2}\right)$ de la courbe de Bézier $\Gamma((P_0, P_1, P_2, P_3))$ de paramètre $t = \frac{1}{2}$.

Partie E : points de contrôle aux sommets d'un carré

Dans toute cette partie, A, B, C, D sont les sommets consécutifs d'un carré.
On note $\mathcal{Q}$ l'ensemble $\{A, B, C, D\}$.

XVII. Isométries du carré.

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ des isométries du plan $\mathcal{P}$ qui conservent globalement l'ensemble $\mathcal{Q}$. Parmi elles, $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$ désigne l'ensemble de celles qui sont directes et $\mathcal{I}^-(\mathcal{Q})$ l'ensemble de celles qui sont indirectes. La médiatrice du segment $[BC]$ est notée Δ et s_Δ désigne la réflexion d'axe Δ.

1. Montrer que $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ et $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$ munis de la composition des applications sont des groupes. En est-il de même pour $\mathcal{I}^-(\mathcal{Q})$?

2. Montrer que l'application

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{I}^+(\mathcal{Q}) & \to & \mathcal{I}^-(\mathcal{Q}) \\ f & \mapsto & s_\Delta \circ f \end{array} \right.$$

est bijective.

3. Démontrer que $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$ contient exactement 4 éléments. Donner la liste de ces éléments et la table du groupe $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$.

4. Préciser les caractéristiques géométriques de chacune des isométries de $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$.

XVIII. On se propose d'étudier toutes les courbes de Bézier dont les points de contrôle sont situés aux sommets du carré $\mathcal{Q}$.

Rappel : l'ensemble des permutations d'un ensemble fini E est un groupe pour la composition des applications. Ce groupe est noté $\mathfrak{S}(E)$.

1. Quel est le cardinal du groupe $\mathfrak{S}(\mathcal{Q})$?

2. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{Q})$, on note $\Gamma_\sigma = \Gamma((\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C), \sigma(D)))$ la courbe de Bézier de points de contrôle $(\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C), \sigma(D))$. La courbe Γ_σ est dite courbe de Bézier associée à la permutation σ. En s'appuyant sur les questions précédentes, déterminer huit permutations $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{Q})$ telles que Γ_σ soit isométrique à $\Gamma((A, B, C, D))$.

3. On prend pour sommets du carré les points

$$A = (-1\,;-1) \qquad B = (1\,;-1) \qquad C = (1\,;1) \qquad D = (-1\,;1)$$

et on note Γ_1 la courbe de Bézier $\Gamma((A, B, D, C))$ associée à la transposition qui échange C et D.
Pour $t \in [0, 1]$, on rappelle que le point courant de Γ_1 de paramètre t est le point

$$M(t) = \mathrm{bar}\left((A, B_{3,0}(t)), (B, B_{3,1}(t)), (D, B_{3,2}(t)), (C, B_{3,3}(t))\right)$$

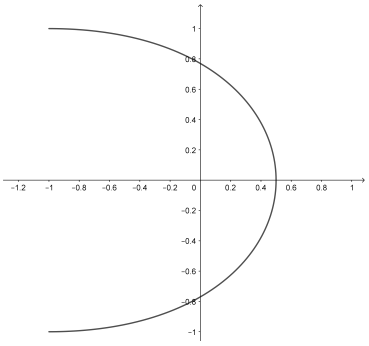
a. Montrer que Γ_1 et $\Gamma((C, D, B, A))$ sont égales. En déduire que Γ_1 est symétrique par rapport au point O.

b. Montrer que les coordonnées $(x(t)\,; y(t))$ de $M(t)$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont données par :

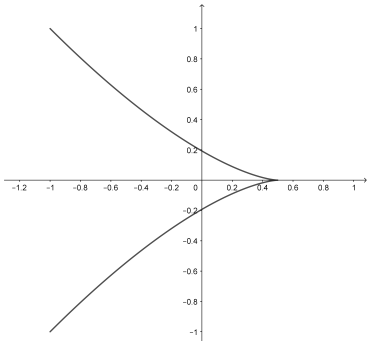
$$x(t) = 8t^3 - 12t^2 + 6t - 1, \qquad y(t) = -4t^3 + 6t^2 - 1.$$

c. Tracer la courbe paramétrée Γ_1.

4. On admet que les deux courbes Γ_2 et Γ_3 représentées ci-dessous sont aussi des courbes de Bézier ayant pour points de contrôle les sommets du carré $\mathcal{Q}$.



Γ_2



Γ_3

Déterminer une permutation τ_2 de $\mathfrak{S}(\mathcal{Q})$ telle que $\Gamma_2 = \Gamma_{\tau_2}$ et une permutation τ_3 de $\mathfrak{S}(\mathcal{Q})$ telle que $\Gamma_3 = \Gamma_{\tau_3}$.

5. À l'aide du résultat précédent, démontrer que Γ_2 et Γ_3 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, ce qui est confirmé par les représentations graphiques.

6. Démontrer que toute courbe de Bézier ayant pour points de contrôle les sommets du carré ABCD est isométrique à l'une des trois courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3.

7. En déduire que toute courbe de Bézier dont les points de contrôle sont les sommets d'un carré est semblable à l'une des trois courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3.

Partie F : raccordement de courbes de Bézier

Pour construire une courbe de Bézier de forme complexe, il faut utiliser de nombreux points de contrôle. Dans ce cas, le degré des polynômes de Bernstein est élevé et la construction de la courbe de Bézier peut être lourde. Il est alors plus judicieux de raccorder des courbes de Bézier de degré peu élevé.

Soient n et m deux entiers naturels non nuls supérieurs ou égaux à 2 et soient $P_0, \ldots, P_n$ et $Q_0, \ldots, Q_m$ des points de $\mathcal{P}$. On pose :

$$M(t) = \text{bar}\left((P_0,\ B_{n,0}(t)), (P_1,\ B_{n,1}(t)), \cdots, (P_n,\ B_{n,n}(t))\right),$$
$$N(t) = \text{bar}\left((Q_0,\ B_{m,0}(t)), (Q_1,\ B_{m,1}(t)), \cdots, (Q_m,\ B_{m,m}(t))\right).$$

On suppose que P_n et Q_0 sont confondus ; les deux courbes de Bézier $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n))$ et $\Gamma((Q_0, Q_1, \ldots, Q_m))$ se raccordent donc en ce point. La courbe raccordée est notée

$$\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n)) \vee \Gamma((Q_0, Q_1, \ldots, Q_m))$$

On dit que la courbe raccordée $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n)) \vee \Gamma((Q_0, Q_1, \ldots, Q_m))$ est *lisse au point de raccordement* lorsque la demi-tangente à gauche à $\Gamma((P_0, \ldots, P_n))$ en P_n et la demi-tangente à droite $\Gamma((Q_0, \ldots, Q_m))$ en Q_0 ont la même direction.

XIX. Dans cette question on suppose que P_{n-1}, P_n et Q_1 sont trois points deux à deux distincts.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur P_{n-1}, P_n et Q_1 pour que la courbe raccordée $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n)) \vee \Gamma((Q_0, Q_1, \ldots, Q_m))$ soit lisse au point de raccordement.
Une démonstration du caractère nécessaire et suffisant de la condition donnée est attendue.

2. On admet que la courbe raccordée $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n)) \vee \Gamma((Q_0, Q_1, \ldots, Q_m))$ peut être paramétrée par :

$$t \mapsto \overrightarrow{OR(t)} = \begin{cases} \overrightarrow{OM(2t)} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \overrightarrow{ON(2t-1)} & \text{si } \dfrac{1}{2} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur P_{n-1}, P_n et Q_1 pour que ce paramétrage de $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n)) \vee \Gamma((Q_0, Q_1, \ldots, Q_m))$ soit de classe $\mathcal{C}^1$.
Une démonstration du caractère nécessaire et suffisant de la condition donnée est attendue.

XX. On reprend la courbe Γ_1 introduite dans la question XVIII. 3.

1. On se propose de raccorder Γ_1 en C à une courbe de Bézier $\Gamma((C, E, F))$ à trois points de contrôle. Expliquer où il faut placer les points E et F pour respecter les deux contraintes suivantes :

a. le paramétrage de la courbe raccordée introduit dans la question XIX. 2. est de classe $\mathcal{C}^1$.

b. le point F est situé sur l'axe (Ox) et la tangente en F à la courbe a pour pente 1.

On note alors $\Gamma = \Gamma_1 \vee \Gamma((C, E, F))$.

2. Donner l'allure de la courbe Γ.